Trigonalisation simultanée (148, 151, 156, 158)

Gourdon, Algèbre p. 136-181

prop : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre

$F \leqslant E$ u-stable ssi $F^\perp$ est ${}^t u$-stable.

<u>démo</u> :

$\Rightarrow$ Comme F est u-stable, on a $u(F) \subset F$. On a $\forall \varphi \in F^\perp$, $\varphi(F) = \{0\}$.

Donc $\varphi \circ u(F) = \{0\}$ ie ${}^t u(\varphi)(F) = \{0\}$. D'où ${}^t u(\varphi) \in F^\perp$.

$\Leftarrow$ Soit $r = \dim F$ alors on a $\dim(F^\perp) = n - r$.

Il existe $n-r$ formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-r}$ telles que $F = \bigcap_{i=1}^{n-r} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$.

En particulier, $\forall i \in [\![1, n-r]\!]$, $F \subset \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ ie $\varphi_i \in F^\perp$.

Comme ${}^t u(F^\perp) \subset F^\perp$ alors ${}^t u(\varphi_i) = \varphi_i \circ u \in F^\perp$ pour tout i. $u(F) \subset \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ donc $u(F) \subset \bigcap_{i=1}^{n-r} \mathrm{Ker}(\varphi_i) = F$

Donc $\varphi_i \circ u(F) = \{0\}$. Donc pour tout i, $\cancel{u(F) \subset \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subset \bigcap_{i=1}^{n-r} \mathrm{Ker}(\varphi_i) = F}$.

thm : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E commutant deux à deux.

Si les u_i sont trigonalisables alors ils sont trigonalisables dans une même base.

<u>démo</u> :

<u>Étape 1</u> : Les u_i admettent un vecteur propre en commun.

Par récurrence sur n.

* $n = 1$, ok

* Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$ et montrons-le au rang n.

  - Si tous les u_i sont des homothéties, on a : $\forall x$ $u_i(x) = \lambda_i x \Rightarrow x$ $\vec{vp}$ u_i $\forall i \in I$.

    ~~$\forall i \in I$, $u_i(x) = \lambda_i x$ et $\forall j \neq i$, on a $u_j(u_i(x)) = u_j(\lambda_i x) = \lambda_j \lambda_i x$~~

    ~~Donc $\lambda_i x$ est un vecteur propre de u_j et on a $u_i(\lambda_i x) = \lambda_i(\lambda_i x)$ donc $\lambda_i x$ est aussi un vecteur propre de u_i.~~

  - Si il existe $i_0 \in I$ tel que u_{i_0} ne soit pas une homothétie.

    Comme u_{i_0} est trigonalisable, on note λ une valeur propre de u_{i_0} et E_λ son espace propre associé.

    Comme u_{i_0} commutent avec u_i, on a E_λ qui est stable par u_i.

    De plus $\dim E_\lambda < n$ car u_{i_0} n'est pas une homothétie.

    Donc par hypothèse de récurrence, il existe un vecteur propre commun à tous les $u_i|_{E_\lambda}$

    D'où tous les u_i ont un vecteur propre en commun.

Étape 2 : Les u_i sont trigonalisables dans une même base.

Par récurrence sur n.

* $n = 1$, ok

* Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$ et montrons le au rang n.

On a ${}^t u_i$ qui sont trigonalisables et commutent deux à deux.

En effet, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_i) = A$.

$$\chi_{u_i}(X) = \det(A - X\,id) = \det\left({}^t(A - X\,id)\right) = \det\left({}^tA - X\,id\right) = \chi_{{}^t u_i}(X).$$

Donc ${}^t u_i$ est trigonalisable.

De plus, on a ${}^t u_i \circ {}^t u_j = {}^t(u_j \circ u_i) = {}^t(u_i \circ u_j) = {}^t u_j \circ {}^t u_i$.

Donc par ce qui précède, les ${}^t u_i$ ont un vecteur propre en commun, notons le $x \in E^*$.

On pose $H = (\mathbb{K}x)^\circ$. H est un hyperplan de E stable par tous les u_i.

En effet, $\mathbb{K}x$ est stable par tous les ${}^t u_i$.

Donc par la proposition précédente, pour $F = (\mathbb{K}x)^\circ$, on a $(\mathbb{K}x)^\circ = H$ qui est stable par tous les u_i.

Par hypothèse de récurrence, comme $\dim H = n-1$, il existe une base $\mathcal{B}$ de H telle que tous les $u_{i|H}$ soient trigonalisables.

Soit $e \in E$ tel que $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}, e)$ forme une base de E

Alors $\forall i \in I$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u_i) = \left(\begin{array}{ccc|c} * & & * & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & * & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & * \end{array}\right)$

Ainsi $\mathcal{B}'$ est une base de trigonalisation commune pour tous les u_i.

Questions : Trigonalisation simultanée

- ${}^t u_i \circ {}^t u_j = {}^t(u_i \circ u_j)$?

Soit E, F et G des $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$.

Soit $g \in G^*$, on a ${}^t(v \circ u)(g) = g \circ (v \circ u) = (g \circ v) \circ u = {}^t u\,(g \circ v) = {}^t u({}^t v(g)) = ({}^t u \circ {}^t v)(g)$.

D'où ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$.

- $H = (\mathbb{K}x)^\circ$ est un hyperplan de E ?

On a $\dim E = \dim H + \dim H^\perp$ donc $\dim H = \dim E - \dim H^\perp = n - \dim(\mathbb{K}x) = n-1$.

- Il existe $n-r$ formes linéaire $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-r}$ telles que $F = \bigcap_{i=1}^{n-r} \operatorname{Ker} \varphi_i$?

On a $\dim F = r$ et $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$.

Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de F, on la complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E

Alors $F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ et $F^\perp = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_r)^\perp$

Soit $\varphi \in E^*$, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*$

On a $\varphi \in F^\perp$ ssi $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\varphi(e_i) = 0$, mais $\varphi(e_i) = \lambda_i$

Ainsi $\varphi \in F^\perp$ ssi $\varphi \in \operatorname{Vect}(e_{r+1}^*, \dots, e_n^*)$.

D'où $\dim F^\perp = n-r$, et il existe $n-r$ formes linéaires indépendantes $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-r}$ telles que

$$(F^\perp)^\circ = F = \{x \in E,\ \forall i \in [\![1, n-r]\!],\ \varphi_i(x) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{n-r} \operatorname{Ker}(\varphi_i)$$

$(F^\perp)^\circ = \{e_{r+1}^*, \dots, e_n^*\}^\circ$ donc

$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in F^{\perp\circ}$ ssi $\forall i \in [\![r+1, \dots, n]\!]$, $0 = e_i^*(x) = \alpha_i$

donc $F^{\perp\circ} = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_r) = F$

montrons que $F^{\perp\circ} = F$